



Matematica
25 agosto 2009

Programma di Matematica

1. [Proprietà delle potenze e logaritmi](#)
2. [I Radicali](#)
3. [Monomi e polinomi](#)
4. [Equazioni e sistemi di equazioni](#)
5. [Disequazioni](#)
6. [Geometria analitica](#)
7. [Accenni di trigonometria](#)
8. [Progressioni](#)



Definizione di Logaritmo

Dati due numeri positivi a e b (con $a \neq 1$), si dirà logaritmo in base a (detto anche *argomento*) l'esponente da attribuire alla base a per ottenere il numero b

$$x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b$$

PROPRIETA'

Il logaritmo in base a dell'argomento b esiste se e solo se sono verificate le seguenti proprietà:

$$a > 0$$

$$b > 0$$

$$b \neq 1$$

Proprietà delle potenze e logaritmi

Proprietà delle potenze

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \left(a^n\right)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$$

$$\left(a \cdot b \cdot c\right)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Proprietà
distributiva

Proprietà dei logaritmi

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a \frac{1}{a^n} = \log_a 1 - \log_a a^n = 0 - n = -n$$

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$$

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

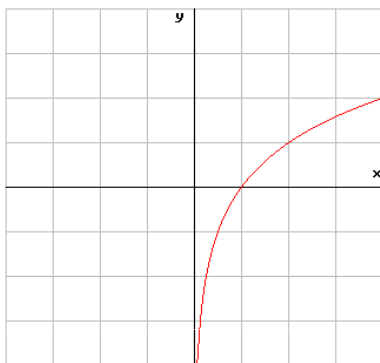
$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^m = m \log_a b$$

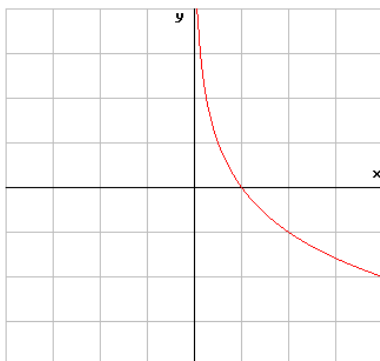
Grafici di funzioni esponenziali e logaritmiche

Funzione logaritmica

1. Base $a > 1$: $y = \log_a x$

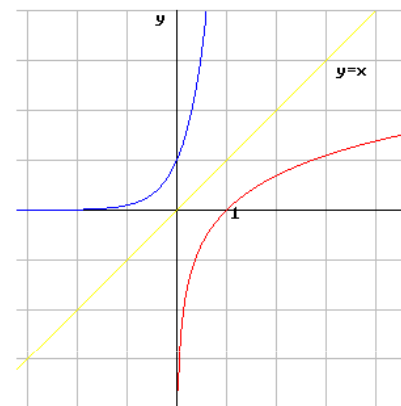


1. Base $0 < a < 1$: $y = \log_a x$

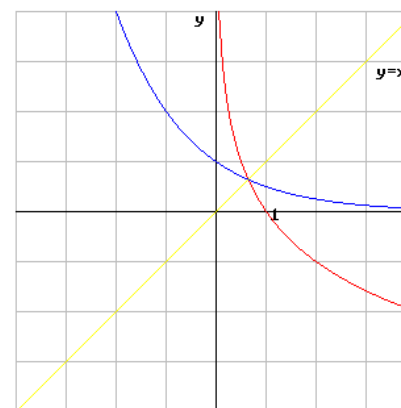


Funzioni logaritmiche ed esponenziali

1. Base $a > 1$

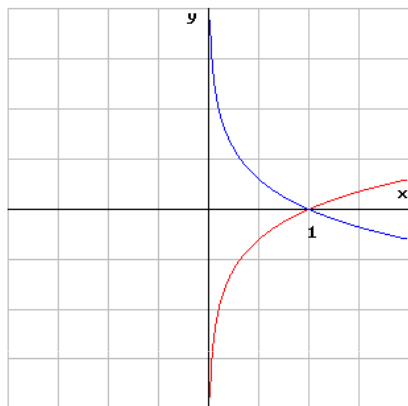


2. Base $0 < a < 1$

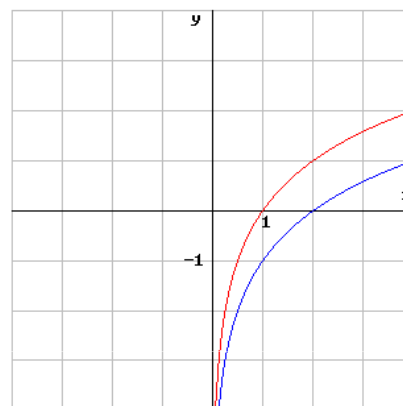


Grafici deducibili di funzioni logaritmiche

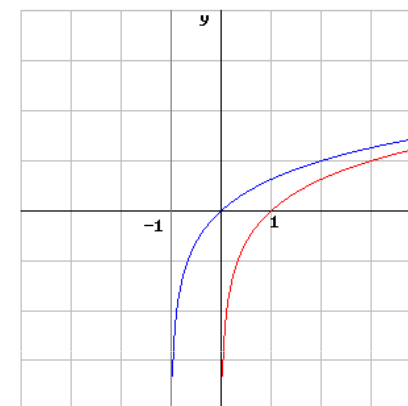
1. Base $a > 1$: $y = -\log_a x$



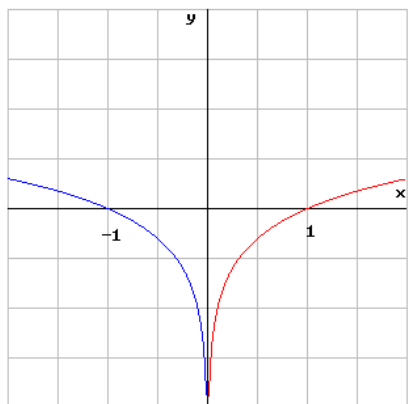
3. Base $a > 1$: $y = \log_2 x - 1$



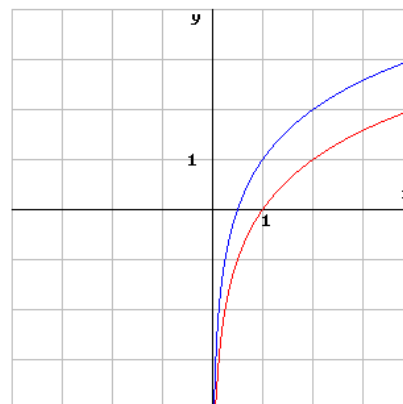
5. Base $a > 1$: $y = \log_2 (x+1)$



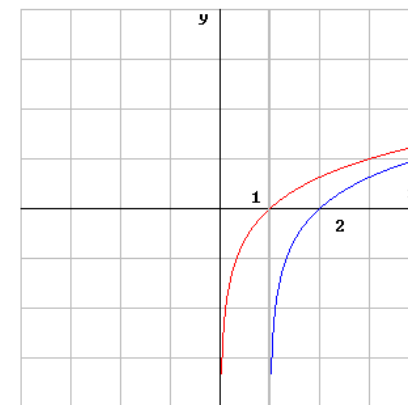
1. Base $a > 1$: $y = \log_a (-x)$



4. Base $a > 1$: $y = \log_2 x + 1$



6. Base $a > 1$: $y = \log_2 (x - 1)$



I Radicali

Il simbolo $\sqrt[n]{a}$ (da leggersi “radice n-esima di a”) prende il nome di radicale, a si chiama radicando, mentre n (con n appartenente a N) prende il nome di indice della radice

PROPRIETA'

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}$$

ATTENZIONE

$$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}$$

$$\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a-b}$$



La razionalizzazione delle frazioni

Razionalizzare una frazione significa eliminare dal denominatore eventuali espressioni irrazionali.

Per raggiungere questo scopo si moltiplicano numeratore e denominatore per un fattore razionalizzante

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

$$\frac{1}{a\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{ab}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{a^{\frac{1-m}{n}}}{a^{\frac{1-m}{n}}} = \frac{a^{\frac{1-m}{n}}}{a} = \frac{a^{\frac{n-m}{n}}}{a} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{a-b}$$

Monomi e Polinomi: Prodotti notevoli

PRODOTTI NOTEVOLI



SCOMPOSIZIONE IN FATTORI

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$$

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$$

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$



Equazioni

SOLUZIONE DI UNA EQUAZIONE

Risolvere una equazione significa trovare i valori della incognita per i quali la relazione di uguaglianza diventa una identità numerica.

La soluzione di una equazione è rappresentata dall'insieme di tutti e soli i valori dell'incognita che soddisfano l'uguaglianza.

1. **Equazione impossibile:** è una equazione che non ammette soluzioni reali;
2. **Equazione indeterminata:** è una equazione che ammette infinite soluzioni;
3. **Equazione determinata:** è una equazione che ammette un numero finito di soluzioni.

EQUAZIONI FRAZIONARIE DI PRIMO GRADO

$$\frac{x^2 - 3}{x + 1} = x + \frac{2x}{x + 1}$$

C.E. $x \neq -1$; la soluzione trovata non è accettabile poiché contrasta con la **CONDIZIONE DI ESISTENZA**

$$\frac{x^2 - 3 - 2x - x(x + 1)}{x + 1} = 0 \rightarrow x^2 - 3 - 2x - x(x + 1) = 0 \rightarrow -3 - 3x = 0 \rightarrow x = -1$$



Equazioni

SOLUZIONE DI UNA EQUAZIONE DI SECONDO GRADO

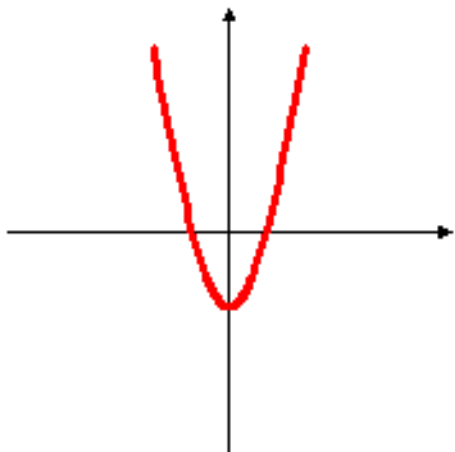
$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

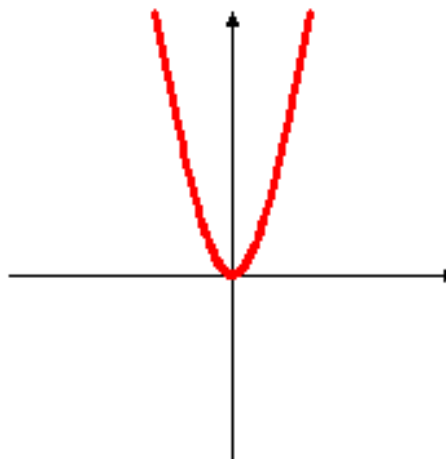
Discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$

- Se $\Delta > 0$, le radici sono reali distinte;
- Se $\Delta = 0$, radici sono reali coincidenti;
- Se $\Delta < 0$, non esistono radici reali.

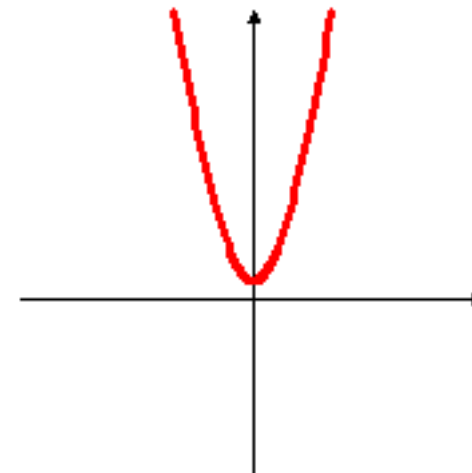
•Se $\Delta > 0$



•Se $\Delta = 0$



•Se $\Delta < 0$



Sistemi di equazioni

SOLUZIONE DI UN SISTEMA DI EQUAZIONI

L'insieme delle coppie di valori numerici che soddisfano contemporaneamente tutte le equazioni costituenti il sistema prende il nome di soluzione del sistema.

Risolvere il seguente sistema:

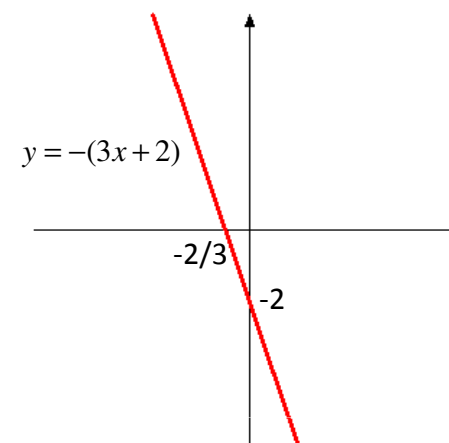
$$\begin{cases} 6x + 2y + 4 = 0 \\ 5x^2 - y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + y + 2 = 0 \\ y = 5x^2 - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -(3x + 2) \\ y = 5x^2 - 1 \end{cases}$$

Sistemi di equazioni

Disegno del grafico del sistema:

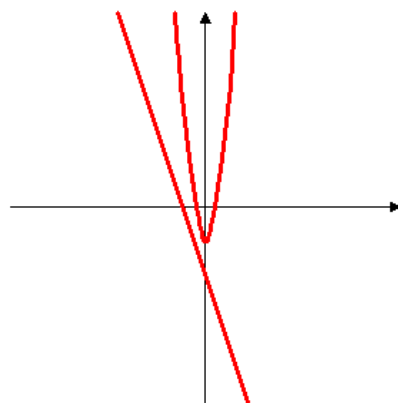
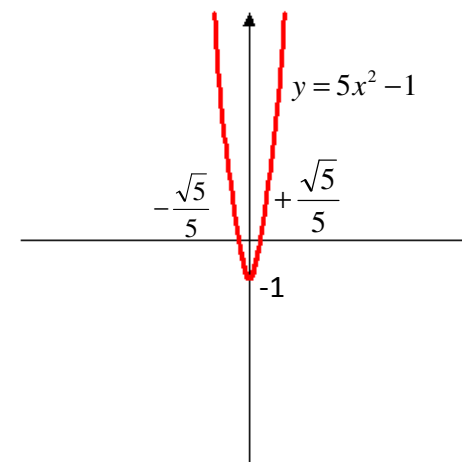
$$y = -(3x + 2)$$

Rappresenta una retta che interseca l'asse delle ordinate a $y=-2$ e le ascisse per $x=-2/3$



$$y = 5x^2 - 1$$

Rappresenta una parabola che interseca l'asse delle x per $x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$ E l'asse delle y per $y=-1$



**IL SISTEMA NON AMMETTE
SOLUZIONI POICHE' I DUE GRAFICI
NON SI INTERSECANO MAI**

Disequazioni

Una disequazione è un disuguaglianza tra due espressioni algebriche letterali verificata solo per alcuni valori numerici assegnati alle lettere

PROPRIETA' DELLE DISEQUAZIONI

$$a > b \Leftrightarrow a + k > b + k$$

$$a > b \Leftrightarrow a + k > b + k$$

$$k > 0 \quad a \cdot k > b \cdot k;$$

$$k < 0 \quad a \cdot k < b \cdot k;$$

$$\frac{a}{k} > \frac{b}{k}$$

$$\frac{a}{k} < \frac{b}{k}$$

Possiamo inoltre dire che se $a \cdot b > 0; \frac{a}{b} > 0$ a e b sono CONCORDI

$a \cdot b < 0; \frac{a}{b} < 0$ a e b sono DISCORDI



Disequazioni frazionarie di primo grado

$$\frac{2}{x-1} \geq -1$$

CALCOLO

$$\frac{2}{x-1} \geq -1 \rightarrow \frac{2+x-1}{x-1} \geq 0 \rightarrow \frac{x+1}{x-1} \geq 0$$

$$N \geq 0 \rightarrow x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$$

$$D > 0 \rightarrow x-1 > 0 \rightarrow x > 1$$

GRAFICO

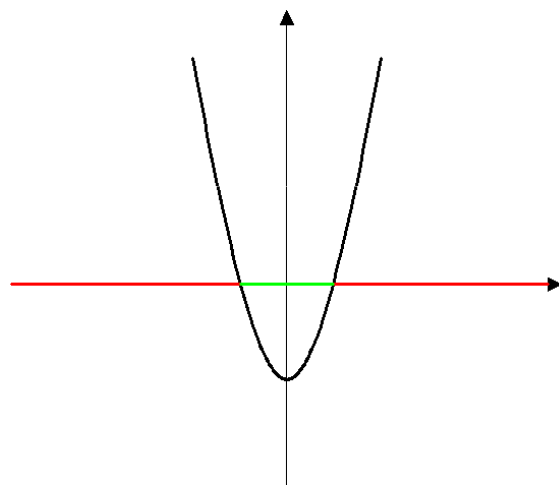
| | | | |
|------------|----|---|---|
| | -1 | 1 | |
| | | | |
| $N \geq 0$ | - | + | + |
| $D > 0$ | - | - | + |
| | + | - | + |
| | | | |

$$S = \{\forall x \in R; x \leq -1 \vee x > 1\}$$

Disequazioni intere di secondo grado

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \text{oppure} \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$

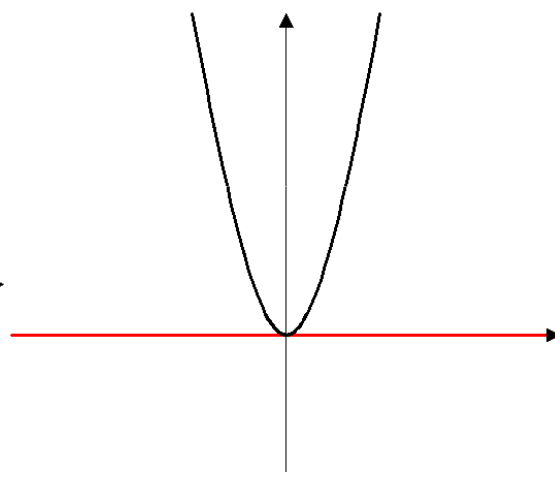
GRAFICO E SOLUZIONI



$$x_1 < x_2$$

$$y \geq 0 \rightarrow x \leq x_1 \vee x \geq x_2$$

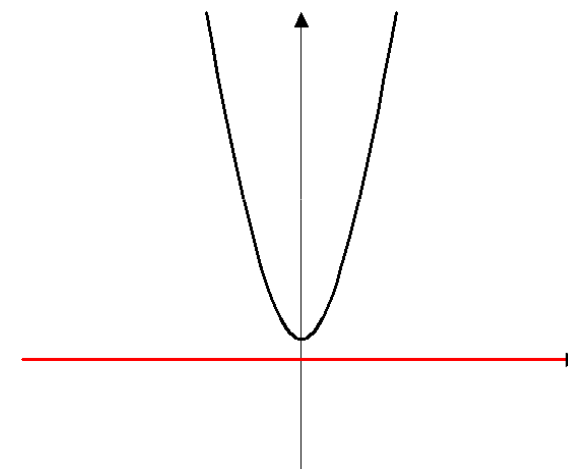
$$y \leq 0 \rightarrow x_1 \leq x \leq x_2$$



$$x_1 \equiv x_2$$

$$y > 0 \rightarrow x \neq x_1 \quad y \leq 0 \rightarrow x = x_1$$

$$y \geq 0 \rightarrow \forall x \in R \quad y < 0 \rightarrow \emptyset$$



$$x_{1,2} \notin R$$

$$y > 0 \rightarrow \forall x \in R$$

$$y < 0 \rightarrow \emptyset$$

Disequazioni frazionarie di secondo grado

$$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 1} \leq 0$$

CALCOLO

$$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 1} \leq 0 \rightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)(x+1)} \leq 0$$

$N \geq 0 \rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2 \rightarrow x \leq 0 \vee x \geq 2$
 $D > 0 \rightarrow x_1 = 1; x_2 = -1 \rightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$

GRAFICO

| | -1 | 0 | 1 | 2 | |
|------------|----|---|---|---|---|
| $N \geq 0$ | + | + | - | - | + |
| $D > 0$ | + | - | - | + | + |
| | + | - | + | - | + |

$$S = \{\forall x \in \mathbb{R}; -1 < x \leq 0 \vee 1 < x \leq 2\}$$

Geometria Analitica

DISTANZA TRA DUE PUNTI E COORDINATE DEL LORO PUNTO MEDIO

$$\overline{AB} = \begin{cases} |y_2 - y_1| \\ |x_2 - x_1| \\ \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{cases}$$

EQUAZIONE DI UNA RETTA PASSANTE PER UNO O DUE PUNTI

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



Curve algebriche del secondo ordine: CONICHE

CIRCONFERENZA (equazione generale)

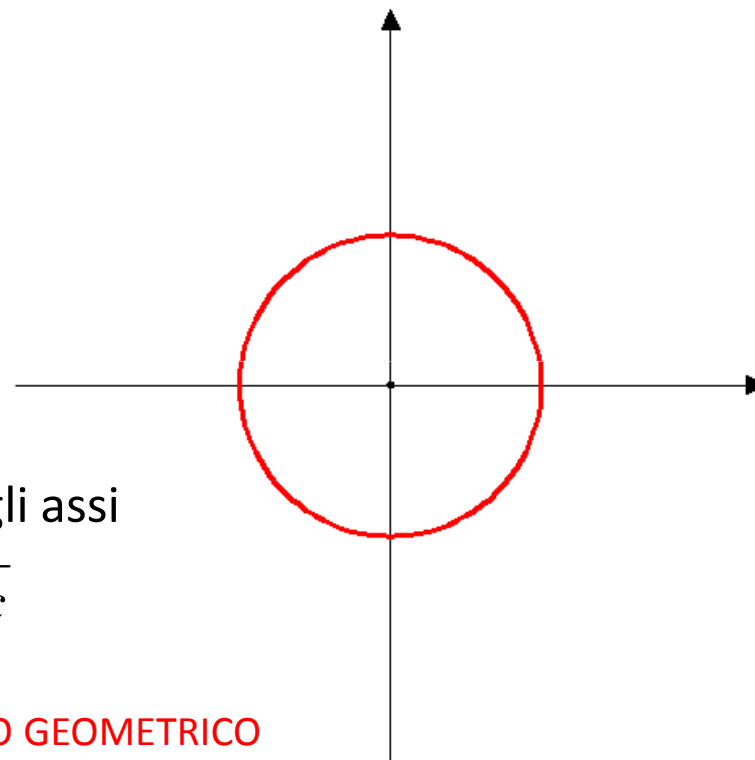
$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$C = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \right)$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

1. Circonferenza con centro nell'origine degli assi

$$x^2 + y^2 - c = 0 \rightarrow x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow r = \sqrt{-c}$$



LA CIRCONFERENZA E' IL LUOGO GEOMETRICO
DEI PUNTI DEL PIANO EQUIDISTANTI DA UN
PUNTO DETTO CENTRO

Curve algebriche del secondo ordine: CONICHE

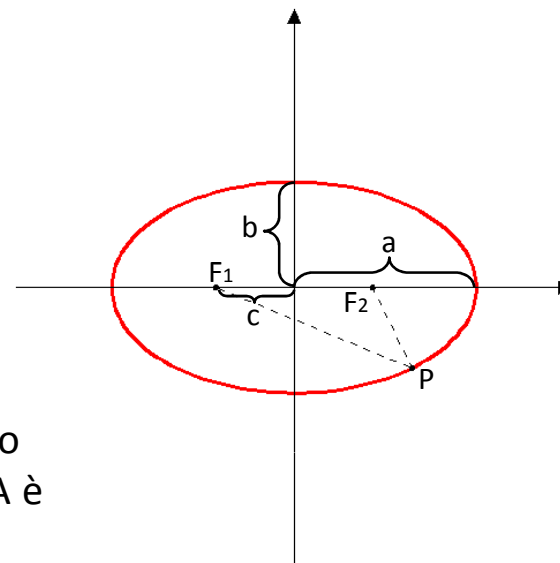
ELLISSE (equazione generale)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$e = \frac{c}{a}$ L'eccentricità di un'ellisse è indice di quanto
l'ellisse è "schiacciata" → LA CIRCONFERENZA è
UN'ELLISSE CON ECCENTRICITÀ NULLA



1. Circonferenza con centro nell'origine degli assi

$$x^2 + y^2 - c = 0 \rightarrow x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow r = \sqrt{-c}$$

L'ELLISSE E' IL LUOGO GEOMETRICO DEI
PUNTI DEL PIANO PER I QUALI E' COSTANTE
LA SOMMA DELLE DISTANZE DA DUE PUNTI
FISSI DETTI FUOCHI



Curve algebriche del secondo ordine: CONICHE

IPERBOLE (equazione generale)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \left| \overline{PF_1} - \overline{PF_2} \right| = 2a$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{SEMIDISTANZA FOCALE}$$

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{Eccentricità}$$

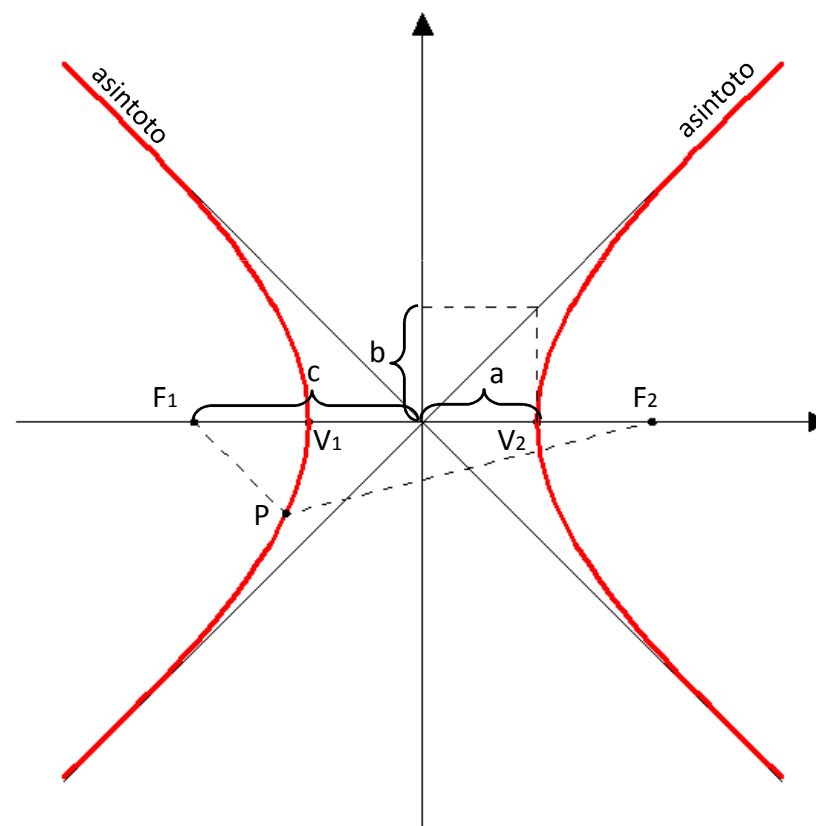
$$y = \frac{b}{a} x \quad \text{Asintoto I e III quadrante}$$

$$y = -\frac{b}{a} x \quad \text{Asintoto II e IV quadrante}$$

1. IPERBOLE EQUILATERA

$$xy = k$$

L'IPERBOLE E' IL LUOGO DEI PUNTI DEL PIANO PER I QUALI E' COSTANTE (IN VALORE ASSOLUTO) LA DIFFERENZA DELLE DISTANZE DA DUE PUNTI FISSI DETTI FUOCHI



Curve algebriche del secondo ordine: CONICHE

PARABOLA (equazione generale)

$$y = ax^2 + bx + c \quad \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

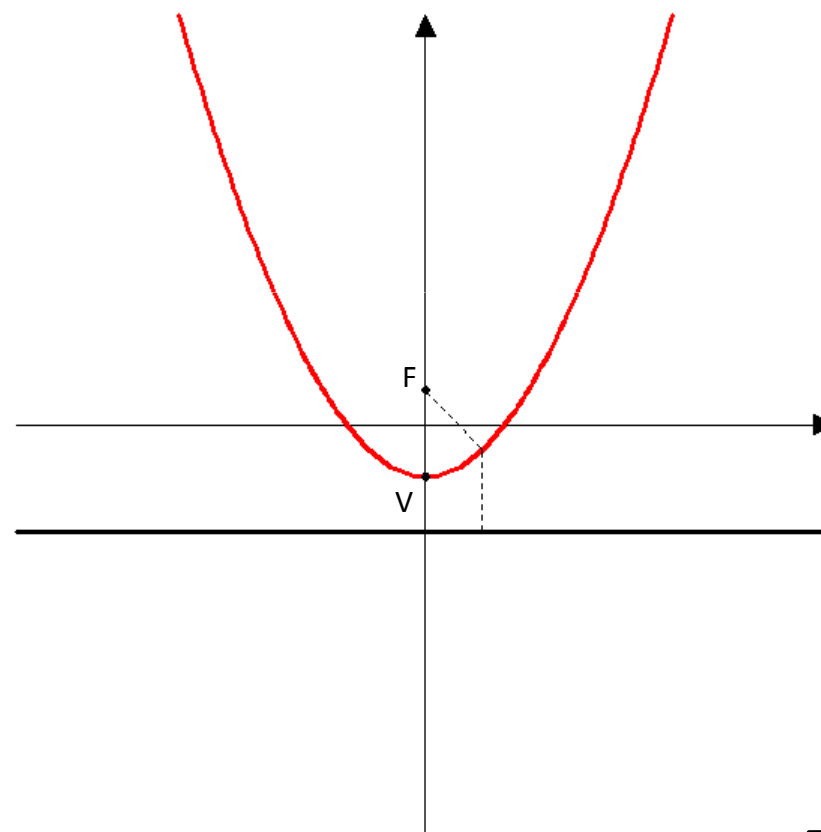
$$F = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a} \right) \quad \text{FUOCO}$$

$$y = -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a} \quad \text{DIRETTRICE}$$

$$V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right) \quad \text{VERTICE}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \quad \text{ASSE DI SIMMETRIA}$$

LA PARABOLA E' IL LUOGO DEI PUNTI
EQUIDISTANTI DA UN PUNTO DETTO FUOCO
E DA UNA RETTA DETTA DIRETTRICE

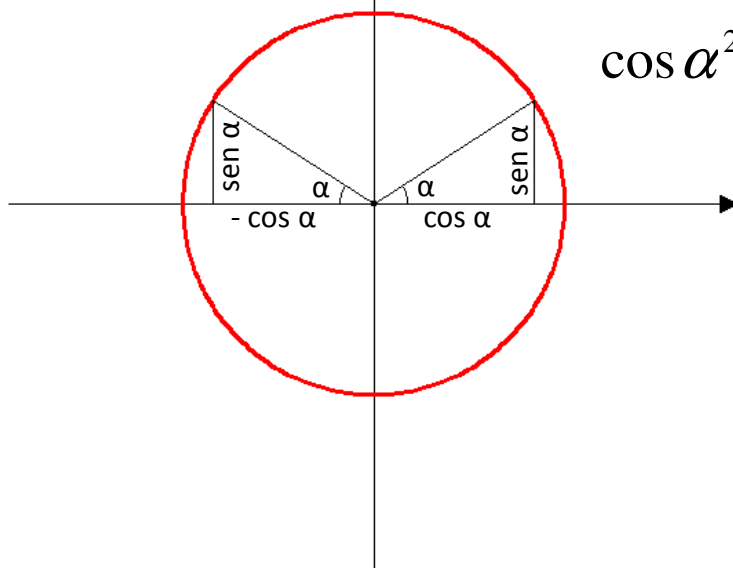


Accenni di Trigonometria

CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Viene detta circonferenza goniometrica una qualsiasi circonferenza orientata alla quale sia associato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nel quale si assume il raggio della circonferenza come unità di misura. LA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA HA RAGGIO UNITARIO

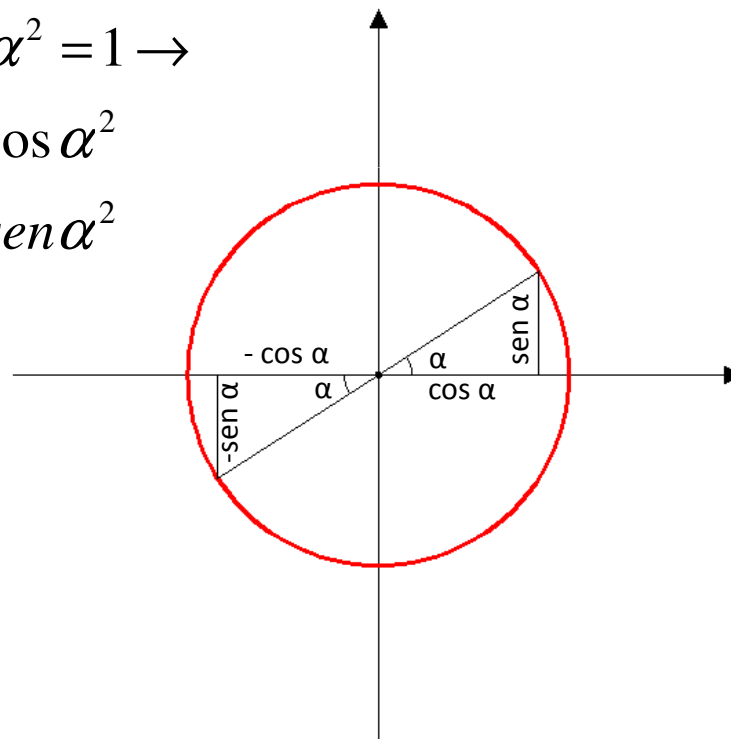
$$tg \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$



$$\text{sen } \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1 \rightarrow$$

$$\text{sen } \alpha^2 = 1 - \cos \alpha^2$$

$$\cos \alpha^2 = 1 - \text{sen } \alpha^2$$



Progressioni

Si consideri una qualsiasi legge che a ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$, con n diverso da zero, associandoci un numero reale $a_n \in \mathbb{R}$

Questa legge, che può essere pensata come una funzione da \mathbb{N} a \mathbb{R} , Trasforma l'insieme numerico

$$1, 2, 3, \dots, n-2, n-1, n$$

Nell'insieme numerico:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$$

Si dirà allora che i numeri dell'insieme sono **ORDINATI IN UNA PROGRESSIONE**



Progressione aritmetica

Una progressione si dice ARITMETICA quando è COSTANTE LA DIFFERENZA TRA CIASCUN TERMINE (escluso il primo) E IL PRECEDENTE: tale differenza viene detta RAGIONE della progressione aritmetica, indicata in genere con la lettera d

Es. 1,3,5,7,9..... progressione aritmetica di ragione 2

CALCOLO DELL' N-ESIMO TERMINE

L'n-esimo termine a_n di una progressione aritmetica è uguale alla somma del primo termine a_1 con il prodotto della ragione d per il numero dei termini che precedono a_n

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$$



Progressione aritmetica

CALCOLO DELLA SOMMA DEI PRIMI N TERMINI

La somma dei primi n termini di una progressione aritmetica è uguale alla semisomma dei termini estremi a_1 e a_n , moltiplicata per il numero n dei termini

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$



Progressione geometrica

Una progressione si dice GEOMETRICA quando è COSTANTE IL QUOZIENTE TRA CIASCUN TERMINE E IL PRECEDENTE (escluso il primo): tale differenza viene detta RAGIONE della progressione geometrica, indicata in genere con la lettera q

Es. 2, 4, 8, 16, 32, ... progressione geometrica di ragione 2

CALCOLO DELL' N-ESIMO TERMINE

L'n-esimo termine a_n di una progressione geometrica è uguale al prodotto del primo termine a_1 per la ragione q elevata al numero dei termini che precedono a_n

$$a_n = a_1 + q^{n-1}$$



Progressione aritmetica

CALCOLO DELLA SOMMA DEI PRIMI N TERMINI

La somma dei primi n termini di una progressione geometrica è uguale al prodotto del primo termine a_1 per la ragione q elevata al numero dei termini che precedono a_n

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

